第26卷 第5期 工 程 数 学 学 报 Vol. 26 No. 5
2009年10月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Oct. 2009

文章编号:1005-3085(2009)05-0941-05

α-对角占优矩阵的讨论及其应用*

李 敏， 孙玉祥

(北华大学数学学院数学系，长春 132013)

摘 要: 利用矩阵对角占优理论，讨论 α-对角占优矩阵之间的蕴涵关系，并给出条件最弱的严格 α_1-双对角占优矩阵的等价表征，作为应用得到非奇异 H-矩阵新的判定准则，同时给出判定非奇异 H-矩阵的算法，并通过数值结果表明本文判定方法的有效性和优越性。

关键词: 对角占优；α-对角占优矩阵；非奇异 H-矩阵

分类号: **AMS**(2000) 15A57 **中图分类号**: O151.21 **文献标识码**: A

1 引言及定义

非奇异 H-矩阵在数值分析、数学物理、控制论等众多学科中有重要应用，因此对 H-矩阵的判定一直是学者们关注的研究课题。因为非奇异 H-矩阵的主对角元非零，所以本文总假定所涉及矩阵主对角元非零，并且设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$ 为 n 阶复方阵，A^T 表示A的转置矩阵，记

$$R_i(A)=\sum_{j\neq i}|a_{ij}|,\quad C_i(A)=\sum_{j\neq i}|a_{ji}|,$$

$$N=\{1,2,\cdots,n\},\quad M=\{(i,j)\mid i\neq j,\, i\in N,\, j\in N\}.$$

若对任意的 $i\in N$ 都有 $|a_{ii}|\geq(>)R_i(A)$，则称 A 为 (严格) 对角占优矩阵，记为 $A\in D_0$ $(A\in D)$；若对任意的 $(i,j)\in M$ 都有 $|a_{ii}a_{jj}|\geq(>)R_i(A)R_j(A)$，则称 A 为 (严格) 双对角占优矩阵，记为 $A\in DD_0(A\in DD)$。若存在正对角矩阵 X 使得 $AX\in D$，则称 A 为广义严格对角占优矩阵 (也称为非奇异 H-矩阵)，记为 $A\in D^*$。

为了行文方便，在下面的定义中给出五种 α-对角占优矩阵的记号。

定义 1[1-8] 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，如果存在 $\alpha\in[0,1]$，对任意的 $i\in N$ 使得

$$|a_{ii}|\geq[R_i(A)]^\alpha[C_i(A)]^{1-\alpha},$$

则称 A 为 α_1-对角占优矩阵，记作 $A\in D_1$ (α_0)；如果

$$|a_{ii}|\geq\alpha R_i(A)+(1-\alpha)C_i(A),$$

则称 A 为 α_2-对角占优矩阵，记作 $A\in D_2$ (α_0)；如果对任意的 $(i,j)\in M$ 使得

$$|a_{ii}a_{jj}|\geq\big[R_i(A)R_j(A)\big]^\alpha\big[C_i(A)C_j(A)\big]^{1-\alpha},$$

收稿日期: 2008-04-23. **作者简介**: 李敏 (1974年9月生)，男，硕士，副教授. 研究方向：矩阵理论及其应用.

*基金项目: 吉林省教育厅“十一五”科学技术研究项目 (吉 2008 第 129 号).

则称 A 为 α_1-双对角占优矩阵，记作 $A \in DD_1(\alpha_0)$；如果

$$|a_{ii}a_{jj}| \geq \left[\alpha R_i(A) + (1-\alpha)C_i(A)\right]\left[\alpha R_j(A) + (1-\alpha)C_j(A)\right],$$

则称 A 为 α_2-双对角占优矩阵，记作 $A \in DD_2(\alpha_0)$；如果

$$|a_{ii}a_{jj}| \geq \alpha\left[R_i(A)R_j(A)\right] + (1-\alpha)\left[C_i(A)C_j(A)\right],$$

则称 A 为 α_3-双对角占优矩阵，记作 $A \in DD_3(\alpha_0)$。(若上述不等式都成立严格不等号“$>$”，则相应的分别记作 $A \in D_1(\alpha), D_2(\alpha), DD_1(\alpha), DD_2(\alpha), DD_3(\alpha)$)。

注1 在上述定义，如果 $A \in D_1(\alpha)$ (或 $D_2(\alpha)$)，则当 $\alpha = 1$ 时，有 $A \in D$，当 $\alpha = 0$ 时，有 $A^T \in D$；如果 $A \in DD_1(\alpha)$ ($DD_2(\alpha)$ 或 $DD_3(\alpha)$)，则当 $\alpha = 1$ 时，有 $A \in DD$，当 $\alpha = 0$ 时，有 $A^T \in DD$。总之，都有 A 为非奇异 H-矩阵[6]。

引理1[1-8] 若矩阵 A 满足下列条件之一：

1) $A \in D_1(\alpha)$； 2) $A \in D_2(\alpha)$； 3) $A \in DD_1(\alpha)$； 4) $A \in DD_2(\alpha)$； 5) $A \in DD_3(\alpha)$，则 A 为非奇异 H-矩阵。

2 α-对角占优矩阵之间的关系

定理1 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$，则下列结论成立

1) 若 $A \in D_1(\alpha)$，则 $A \in DD_1(\alpha)$；
2) 若 $A \in D_2(\alpha)$，则 $A \in D_1(\alpha)$, $A \in DD_1(\alpha)$, $A \in DD_2(\alpha)$；
3) 若 $A \in DD_2(\alpha)$，则 $A \in DD_1(\alpha)$；
4) 若 $A \in DD_3(\alpha)$，则 $A \in DD_1(\alpha)$。

定理2 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$，则

1) 当 $A \in D_1(\alpha)$ 时，不蕴涵 $A \in D_2(\alpha)$, $A \in DD_2(\alpha)$, $A \in DD_3(\alpha)$；
2) 当 $A \in D_2(\alpha)$ 时，不蕴涵 $A \in DD_3(\alpha)$；
3) 当 $A \in DD_1(\alpha)$ 时，不蕴涵 $A \in D_1(\alpha)$, $A \in D_2(\alpha)$, $A \in DD_2(\alpha)$, $A \in DD_3(\alpha)$；
4) 当 $A \in DD_2(\alpha)$ 时，不蕴涵 $A \in D_1(\alpha)$, $A \in D_2(\alpha)$, $A \in DD_3(\alpha)$；
5) 当 $A \in DD_3(\alpha)$ 时，不蕴涵 $A \in D_1(\alpha)$, $A \in D_2(\alpha)$, $A \in DD_2(\alpha)$。

证明 根据定义易知定理1和定理2的结论是成立的，在此不做详细证明。

注2 定理1和定理2的结论说明，在所有的严格 α-对角占优矩阵定义中，严格 α_1-双对角占优矩阵的条件是最弱的。为此，下面给出严格 α_1-双对角占优矩阵的等价表征。

3 严格 α_1-双对角占优矩阵的等价表征及应用

首先引入记号，行文中在不引起混淆情况下 $R_i(A), C_i(A)$ 分别简记为 R_i, C_i。

$$M_1 = \left\{(i,j) \mid R_iR_j < |a_{ii}a_{jj}| < C_iC_j\right\}, \quad M_2 = \left\{(i,j) \mid C_iC_j < |a_{ii}a_{jj}| < R_iR_j\right\},$$

$$M_3 = \left\{(i,j) \mid |a_{ii}a_{jj}| \geq C_iC_j > R_iR_j\right\}, \quad M_4 = \left\{(i,j) \mid |a_{ii}a_{jj}| \geq R_iR_j > C_iC_j\right\},$$

$$M_5 = \left\{(i,j) \mid |a_{ii}a_{jj}| > R_iR_j = C_iC_j\right\}, \quad M_6 = \left\{(i,j) \mid R_iR_j \geq |a_{ii}a_{jj}|, C_iC_j \geq |a_{ii}a_{jj}|\right\},$$

显然有 $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5 \cup M_6$。再记

$$\alpha_{ij} = \frac{|a_{ii}a_{jj}|}{R_iR_j}, \quad \beta_{ij} = \frac{C_iC_j}{|a_{ii}a_{jj}|}, \quad \gamma_{ij} = \frac{C_iC_j}{R_iR_j}, \quad \gamma_{ij} = \alpha_{ij}\beta_{ij}, \quad \forall\,(i,j) \in M_1;$$

$$x_{ij} = \frac{|a_{ii}a_{jj}|}{C_iC_j}, \quad y_{ij} = \frac{R_iR_j}{|a_{ii}a_{jj}|}, \quad z_{ij} = \frac{R_iR_j}{C_iC_j}, \quad z_{ij} = x_{ij}y_{ij}, \quad \forall\,(i,j) \in M_2.$$

因此有 $\gamma_{ij} > \alpha_{ij} > 1$, $\gamma_{ij} > \beta_{ij} > 1$, $z_{ij} > x_{ij} > 1$, $z_{ij} > y_{ij} > 1$。

注3　由注1知严格对角占优矩阵(严格双对角占优矩阵)必为非奇异 H-矩阵，因此下面在对严格 α_1-双对角占优矩阵的讨论中，只考虑 $\alpha \in (0,1)$ 情况。

引理2　设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$ 且 $M_6 = \emptyset$，如果 M_1, M_2 至少有一个为空集，则 $A \in DD_1(\alpha)$。

证明　有以下三种情况

情况1　若 $M_1 \neq \emptyset$, $M_2 = \emptyset$，则对于任意的 $(i,j) \in M_1$，取 $\alpha \in (\log_{\gamma_{ij}} \beta_{ij}, 1) \subset (0,1)$;

情况2　若 $M_1 = \emptyset$, $M_2 \neq \emptyset$，则对于任意的 $(i,j) \in M_2$，取 $\alpha \in (0, \log_{z_{ij}} x_{ij}) \subset (0,1)$;

情况3　若 $M_1 = M_2 = \emptyset$，则对于任意的 $(i,j) \in M_3 \cup M_4 \cup M_5$，取 $\alpha \in (0,1)$ 总会得到

$$|a_{ii}a_{jj}| > [R_iR_j]^{\alpha}[C_iC_j]^{1-\alpha}, \quad \forall\,(i,j) \in M,$$

从而根据定义知 $A \in DD_1(\alpha)$，证毕。

下面总假定 $M_1 \neq \emptyset$, $M_2 \neq \emptyset$。

推论1　设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$，如果 $M_6 = \emptyset$，则当 M_1, M_2 至少有一个为空集时有 A 为非奇异 H-矩阵。

证明　由引理2及引理1知结论成立。

定理3　设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$，则 $A \in DD_1(\alpha)$ 的充分必要条件是 $M_6 = \emptyset$，且

$$\max_{(s,t)\in M_1} \log_{\gamma_{st}} \beta_{st} < \min_{(i,j)\in M_2} \log_{z_{ij}} x_{ij}\,. \tag{1}$$

证明　**必要性**　由定义，显然有 $M_6 = \emptyset$，且存在 $\alpha \in (0,1)$ 使得

$$|a_{ii}a_{jj}| > [R_iR_j]^{\alpha}[C_iC_j]^{1-\alpha}, \quad \forall\,(i,j) \in M,$$

则对任意的 $(s,t) \in M_1$ 有

$$\left(\frac{C_sC_t}{|a_{ss}a_{tt}|}\right)^{1-\alpha} < \left(\frac{|a_{ss}a_{tt}|}{R_sR_t}\right)^{\alpha} \Leftrightarrow (\alpha_{st}\beta_{st})^{\log_{\alpha_{st}\beta_{st}} \beta_{st}} = \beta_{st} < (\alpha_{st}\beta_{st})^{\alpha}\,.$$

因为 $\gamma_{st} = \alpha_{st}\beta_{st} > 1$，所以 $\log_{\gamma_{st}} \beta_{st} = \log_{\alpha_{st}\beta_{st}} \beta_{st} < \alpha$。同上面证明类似，对任意的 $(i,j) \in M_2$，有 $\alpha < \log_{x_{ij}y_{ij}} x_{ij} = \log_{z_{ij}} x_{ij}$。综上所述

$$\log_{\gamma_{st}} \beta_{st} < \log_{z_{ij}} x_{ij}, \quad \forall\,(s,t) \in M_1, \quad \forall\,(i,j) \in M_2.$$

即 (1) 式成立。

充分性　由 (1) 式及指标集 M_1, M_2 的取法可知，必存在常数 α，满足

$$0 < \log_{\gamma_{st}} \beta_{st} < \alpha < \log_{z_{ij}} x_{ij} < 1, \quad \forall\,(s,t) \in M_1, \quad \forall\,(i,j) \in M_2. \tag{2}$$

由(2)式的第二个不等式，并注意到对任意的 $(s,t)\in M_1$，$\gamma_{st}=\alpha_{st}\beta_{st}>1$，得

$$|a_{ss}a_{tt}|>[R_sR_t]^{\alpha}[C_sC_t]^{1-\alpha},\quad (s,t)\in M_1.$$

由(2)式的第三个不等式，注意到对任意的 $(i,j)\in M_2$，$z_{ij}=x_{ij}y_{ij}>1$，得

$$|a_{ii}a_{jj}|>[R_iR_j]^{\alpha}[C_iC_j]^{1-\alpha},\quad (i,j)\in M_2.$$

又因为对任意的 $(i,j)\in M_3\cup M_4\cup M_5$，$\alpha\in(0,1)$，显然有

$$|a_{ii}a_{jj}|>[R_iR_j]^{\alpha}[C_iC_j]^{1-\alpha},\quad (i,j)\in M_3\cup M_4\cup M_5.$$

综上所述根据定义，即有 $A\in DD_1(\alpha)$。

定理4 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，$M_6=\emptyset$，如果矩阵 A 满足不等式

$$\max_{(s,t)\in M_1}\log_{\gamma_{st}}\beta_{st}<\min_{(i,j)\in M_2}\log_{z_{ij}}x_{ij},$$

则 A 为非奇异 H-矩阵。

证明 由定理3知 $A\in DD_1(\alpha)$，再根据引理1知，A 为非奇异 H-矩阵。

4 数值算例

算法和程序

1) 输入矩阵 A;

2) 计算 $R_i(A)$, $C_i(A)$, $i\in N$ (计算公式见前面记号);

3) 确定指标集 M_1，M_2，M_6;

4) 如果 $M_6\neq\emptyset$，则判定法则失效;

5) 如果 $M_6=\emptyset$ 则计算 α_{ij}, β_{ij}, γ_{ij}，对任意的 $(i,j)\in M_1$; x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}, $(i,j)\in M_2$;

6) 根据5)计算并验证定理4的条件，如果条件满足则输出结果“A 为非奇异 H-矩阵”。

由上述算法利用数学软件Matlab编制程序，所有的计算结果是在IBM-PC Pentium IV处理器上应用数学软件Matlab 6.5实现的(计算结果精确到小数点后四位)。

例1 令

$$A=\begin{pmatrix} 2.5 & 1 & 0.5 & 1 & 0.5\\ 0.5 & 3 & 4.2 & 0.5 & 0\\ 0.5 & 0.5 & 3.3 & 0.4 & 0.1\\ 0.3 & 0.5 & 1 & 10 & 1\\ 0.2 & 0 & 0.5 & 1 & 10 \end{pmatrix},$$

易见 $M_6=\emptyset$，进而计算得到

$$\max_{(s,t)\in M_1}\log_{\gamma_{st}}\beta_{st}\approx 0.4857<0.5558\approx\min_{(i,j)\in M_2}\log_{z_{ij}}x_{ij},$$

即满足定理4的条件，所以矩阵 A 为非奇异 H-矩阵。

通过此例子与文献[2]和[3]中的判定法则相比较，本文的定理5是优于文献[2]和[3]中判定法则的。矩阵A也不满足[9]之定理1和[10]之定理1的条件，因此无法由文献[9]和文献[10]之定理1进行判定。

致谢：作者衷心感谢审稿专家为我提出的宝贵意见，从中我获益匪浅，在此也诚挚地感谢杨月婷教授对我的指导和帮助。

参考文献：

[1] 莫宏敏，刘建州. 广义严格对角占优矩阵与非奇异M-矩阵的判定[J]. 工程数学学报，2007, 24(6): 1125-1128
[2] 宋乾坤. 广义严格对角占优矩阵的充分判据[J]. 高等学校计算数学学报，2004, 26(4): 298-305
[3] 房秀芬，黄廷祝. α-连对角占优矩阵与M-矩阵刻画[J]. 工程数学学报，2005, 22(1): 123-127
[4] 李庆春. 广义严格对角占优矩阵的判定[J]. 高等学校计算数学学报，1999, 3: 87-92
[5] 黄廷祝. Ostrowski定理的推广与非奇异H矩阵的条件[J]. 计算数学，1994, 16(1): 19-24
[6] Huang T Z, *et al.* Contributions to H-matrices[J]. ZAMM Z Angew Math Mech, 2000, 80(1): 493-496
[7] Sun Y X. An improvent on a theorem by Ostrowski and its applications[J]. Northeastern Math, 1991, 7(4): 497-502
[8] 孙玉祥. 广义对角占优矩阵的充分条件[J]. 高等学校计算数学学报，1997, 9: 216-223
[9] Gan T B, Huang T Z. Simple criteria for nonsingular H-matrices[J]. Linear Algebra Appl, 2003, 374: 317-326
[10] 庹清. 非奇异H-矩阵判定的新条件[J]. 工程数学学报，2008, 25(4), 749-752

Discussion for α-diagonally Dominant Matrices and its Applications

LI Min,　SUN Yu-xiang

(Department of Mathematics, Mathematics College of Beihua University, Changchun 132013)

Abstract: By using the theory of diagonally dominant matrices, we discuss the relations for α-diagonally dominant matrices. We give an equivalence representation for strictly double α_1-diagonally dominant matrices. As its application, we obtain some criteria for nonsingular H-matrices. Meanwhile, the corresponding algorithm is given. The numerical results show the efficiency of the proposed criteria.
Keywords: diagonal dominance; α-diagonally dominant matrices; nonsingular H-matrices